הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
משוואות דיפרנציאליות רגילות / ח' – 104131
פתרון בוחן אמצע , סמסטר חורף תשס"ט

22.12.08

הוראות:

1. יש לכתוב בכתב יד ברור ונקי ולנמק כל שלב בפתרון.
2. יש לענות על כל השאלות.
3. אין להשתמש בשום חומר עזר.
4. בהצלחה!!!

שאלה 1:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$5y' - \frac{5y}{x} = -3 \cdot \left(\frac{y}{x} - 4\right)^{1/6}$$

א. מצאו פתרון כללי למד"ר הנ"ל.

ב. מצאו פתרון פרטי העובר דרך הנקודה $(1,4)$.

ג. האם מתקיים משפט הקיום והיחידות לפתרון הפרטי מסעיף ב'? **הסבירו!!!**

פתרון:

א. הצבה: $v \equiv \frac{y}{x} \to y' = v' \cdot x + v$

נציב זאת במשוואה הדיפרנציאלית הנתונה ולאחר ביצוע הפרדת משתנים נקבל:

$$\frac{-5}{3} \cdot \frac{dv}{(v-4)^{1/6}} = \frac{dx}{x}$$

כפי שרואים ישנו חשש לפתרון סינגולרי והוא: $v - 4 = 0$

כלומר $y = 4x$.

נבצע אינטגרל על שני האגפים ונקבל:

$$-2 \cdot (v-4)^{5/6} = \ln|x| + C$$

נחזור למשתנים המקוריים ונקבל את הפתרון הכללי:

$$\left[\frac{y}{x} - 4\right]^{5/6} = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

ב. הפתרונות הפרטיים הם הפתרון הסינגולרי $y = 4x$ וכן הפתרון הכללי הנ"ל כאשר C=0:

$$\left[\frac{y}{x} - 4\right]^{5/6} = -\frac{1}{2}\ln|x|$$

ג. משפט הקיום והיחידות לא תקף בנקודה מכיוון שהמשוואה היא מד"ר לא ליניארית ולכן יש לדרוש כי עבור $y' = f(x,y)$ מתקיים כי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת ראשונה רציפה והנגזרת לא רציפה בנקודה.

<u>שאלה 2</u>:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$(-x+y-2)dx+(-5x-3y-6)dy=0$$

מצאו גורם אינטגרציה למשוואה מהצורה $\mu(x+3y)$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נשים לב לעובדה כי המשוואה איננה מדויקת: כלומר $M'_y \neq N'_x$

$$M \equiv -x+y-2 \rightarrow M'_y = 1$$
$$N \equiv -5x-3y-6 \rightarrow N'_x = -5$$

לכן נכפול בגורם האינטגרציה:

$$\mu\cdot(-x+y-2)dx+\mu\cdot(-5x-3y-6)dy=0$$

כעת נקבל כי:

$$M'_y = -3x\mu' + \mu + 3y\mu' - 6\mu'$$
$$N'_x = -5\mu - 5x\mu' - 3y\mu' - 6\mu'$$

נדרוש שוויון:

$$M'_y = N'_x$$

וכעת נקבל לאחר צמצום כי:

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{x+3y}$$
$$z \equiv x+3y$$
$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{z} \Rightarrow \mu = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(x+3y)^3}$$

<u>שאלה 3</u>:
מצאו את המשפחה האורטוגונלית למשפחת העקומות הבאה:

$$y^3 = -3 \cdot \ln(C \cdot x)$$

<u>פתרון:</u>

ראשית נקבל את המשוואה הדיפרנציאלית שמתארת את משפחת העקומות הנ"ל:

$$y^3 = -3 \cdot \ln(C \cdot x)$$
$$3y^2 y' = -\tfrac{3}{x}$$
$$y' = -\frac{1}{x \cdot y^2}$$

המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את משפחת העקומות הא"ג היא:

$$y'_{\perp} = -\tfrac{1}{y'} = x \cdot y^2$$

נבצע הפרדת משתנים ונקבל את משפחת העקומות:

$$\int \tfrac{dy}{y^2} = \int x dx$$
$$-\tfrac{1}{y} = \tfrac{x^2}{2} + C$$
$$-2 = y \cdot (x^2 + C)$$

<u>שאלה 4:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$6y' - 2y = x \cdot y^4$$

מצאו פתרון כללי למד"ר.

<u>פתרון:</u>

זוהי משוואת ברנולי ואחת מהפתרונות המהווה חשד לפתרון סינגולרי הוא: $y \equiv 0$.

נעבור כעת לפתרון המשוואה.

נבצע הצבה:

$$v \equiv y^{-3}$$
$$v' = -3y^{-4} \cdot y'$$

נציב במד"ר הנתונה ונקבל:

$$v' + v = -\tfrac{1}{2}x$$

את הפתרון הכללי נקבל באופן הבא:

$$v = \tfrac{1}{\mu} \cdot \left[C + \int \mu \cdot g dx\right]$$
$$\mu \equiv e^x$$

נציב ונקבל:

$$v = C \cdot e^{-x} - \tfrac{1}{2} \cdot (x-1)$$

חזרה למשתנים המקוריים נותנת:

$$y^{-3} = C \cdot e^{-x} - \tfrac{1}{2} \cdot (x-1)$$

מכאן נקבל כי הפתרון: $y \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי.

<u>שאלה 5:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y' = \frac{2x-2y+1}{x-y}$$

מצאו פתרון פרטי למשוואה המקיים: $y(0)=1$

<u>פתרון:</u>

זוהי מד"ר של מנת ישרים מקבילים.

הצבה:

$$z \equiv x - y$$
$$z' = 1 - y'$$

נציב במד"ר שנתונה ונקבל:

$$\tfrac{z}{1+z}\,dz = -dx$$
$$\int \left(\tfrac{z+1}{z+1} - \tfrac{1}{z+1}\right)dz = -\int dx$$

ישנו חשש לפתרון סינגולרי והוא: $z+1=0$ כלומר $y = x+1$.

לאחר ביצוע האינטגרל נקבל:

$$z - \ln|z+1| = -x + C$$

לאחר חזרה למשתנים המקוריים נקבל:

$$2x - y - \ln|x-y+1| = C$$

כפי שניתן לראות רק הפתרון הסינגולרי מקיים את תנאי ההתחלה.